

## データ同化手法を用いた偏微分方程式の逆問題に対する数値的再構成手法の研究

前田高志

指導教員：代田健二

## 1 はじめに

我々の身のまわりには、熱伝導、物質拡散、変形・運動、波動など、さまざまな現象が存在する。それらの現象の多くは、偏微分方程式によってモデル化されている [1]。通常、我々が対象とする問題は、既知のシステムに既知の入力が与えられたときの出力を求める問題である。入力からシステム、出力への流れを順に追っていくので、このような問題は「順問題」と呼ばれる。これに対し、出力結果と順問題に対するシステムから入力を求める問題を「逆問題」と呼ぶ [2]。逆問題は、その設定故に、非適切問題 [3] となることが多い。ここで問題が非適切であるとは、解が一意でない、解が存在しない、解が与えられたデータに対して連続的に依存しない、のいずれか一つでも成り立つことである。数値計算の立場では、非適切問題に対する安定な数値解を求めることが困難であることが多いため、安定な数値解を求める方法が研究されている。その一つとして、パラメトリック射影フィルタによる方法 [4] が提案されており、一定の成果を上げている。さらに近年では、気象予報などの分野で盛んに研究されていたデータ同化手法 [5] を逆問題へ応用することも検討されている。

本研究では、非適切問題である一次元熱伝導方程式を例に、パラメトリック射影フィルタとデータ同化手法を組み合わせた新たな逆問題に対する数値的再構成手法を構築し、その有用性を数値実験により明らかにする。

## 2 一次元熱伝導逆問題

本研究で対象とする一次元熱伝導逆問題について説明する。一様な単位断面積を有し、その側面が断熱性材料で覆われた長さ 1 の棒の熱伝導現象を考える。この棒の任意の場所  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と時刻  $t$  ( $0 \leq t$ ) における温度を  $u(x, t)$  とする。 $\lambda$  を熱伝導率、 $f(x)$  を初期温度分布とすると、熱伝導方程式の順問題は以下のように表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t), \\ u(x, 0) = f(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (0 \leq t). \end{cases}$$

この問題に対して、本研究では次の逆問題を考える。

## 一次元熱伝導逆問題

棒の両端の温度勾配の時刻歴  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \frac{\partial u}{\partial x}(1, t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) が与えられたとき、その温度勾配より初期温度分布  $f(x)$  を推定せよ。

熱伝導方程式の  $t$  を  $-t$  に置き換えると、物理的意味で本質的に異なる方程式が得られる。これは、熱伝導現象が時間を逆にすることができない非可逆現象であることを意味している。よって、考える逆問題は非適切問題となる。

熱伝導方程式に対する問題は、一般に解析的に解くことは困難である。そのため、数値解法により近似解を求めることが多い。本研究では、空間方向は差分法、時間方向は  $\theta$  法 [1] を用いて、まずは順問題を離散化する。空間方向の格子間隔を  $\Delta x$ 、時間方向の格子間隔を  $\Delta t$ 、真値  $u(x_j, t_k)$  ( $j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots, N_T$ ) の近似値を  $u_j^k$  とし、 $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) で表した

とき、 $\theta$  法によるスキームは次のように表される。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \lambda \left\{ (1 - \theta) \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right\}.$$

このスキームを行列表現にすると、次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} 1+2r\theta & -r\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -r\theta & 1+2r\theta & -r\theta & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -r\theta & 1+2r\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -r\theta & 1+2r\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2r(1-\theta) & -r(1-\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ -r(1-\theta) & 1+2r(1-\theta) & -r(1-\theta) & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -r(1-\theta) & 1+2r(1-\theta) \\ 0 & \cdots & 0 & -r(1-\theta) & 1+2r(1-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{pmatrix}.$$

ただし  $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2}$  とする。 $\mathbf{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k)$  とし、係数行列をそれぞれ  $\mathbf{A}_\theta, \mathbf{C}_\theta$  とする。このとき、上の行列表現は次のように書くことができる。

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{u}^k = \cdots = \mathbf{F}_\theta^k \mathbf{u}^0. \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{A}_\theta^{-1} \mathbf{C}_\theta$  である。

また、観測データとなる両端の温度勾配の時刻歴  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \frac{\partial u}{\partial x}(1, t)$  を差分法により離散化すると、観測行列  $\mathbf{H}$  を用いて表現することができる。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^k = \mathbf{H} \mathbf{u}^k.$$

## 3 アンサンブルパラメトリック射影フィルタ

一次元熱伝導逆問題を数値的に解くため、本研究ではパラメトリック射影フィルタ [6] と、データ同化手法 [5] におけるアンサンブル近似を組み合わせることを考える。

$\mathbf{w}^k$  を  $k$  ステップにおける観測誤差とし、次の観測モデルを考える。

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{H} \mathbf{u}^k + \mathbf{w}^k.$$

このとき、(1) より

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{H} \mathbf{F}_\theta^k \mathbf{u}^0 + \mathbf{w}^k$$

よって、観測モデルは求める対象である初期値ベクトル  $\mathbf{u}^0$  を用いて、次のように書くことができる。

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{u}^0 + \mathbf{w}.$$

ただし、 $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^0, \dots, \mathbf{y}^{N_T})^T$ ,  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^0, \dots, \mathbf{w}^{N_T})^T$  であり、

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \mathbf{F}_\theta \\ \vdots \\ \mathbf{H} \mathbf{F}_\theta^{N_T} \end{pmatrix}.$$

観測誤差共分散行列を対角に並べた行列を  $\mathbf{R}$  とするとき、パラメトリック射影フィルタ [6] による初期値ベクトル同定法は、次のとおりになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{l+1}^0 &= \mathbf{u}_l^0 + \mathbf{B}_{\gamma,l}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{u}_l^0) \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \\ \mathbf{B}_{\gamma,l} &= \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^T + \gamma\mathbf{R}_l)^{-1} \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma \geq 0$  は与えられたパラメータである。

この同定法に、データ同化手法におけるアンサンブル近似の考えを導入する。ここで、 $M$  をメンバ数とする。このとき、アンサンブル射影フィルタによる同定アルゴリズムは、次のとおりである。

---

**Algorithm 1** アンサンブル射影フィルタ同定アルゴリズム

---

- 1: 初期メンバ  $\{\mathbf{u}_{0,m}^0\}_{m=1}^M$  を選ぶ。
  - 2:  $\mathbf{u}_0^0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_{0,m}^0$ ,  $l = 0$
  - 3: **repeat**
  - 4:    $\mathbf{w}_{l,m}$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) を発生させる
  - 5:    $\bar{\mathbf{w}}_l = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{w}_{l,m}$
  - 6:    $\hat{\mathbf{R}}_l = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (\mathbf{w}_{l,m} - \bar{\mathbf{w}}_l)(\mathbf{w}_{l,m} - \bar{\mathbf{w}}_l)^T$
  - 7:    $\mathbf{B}_{\gamma,l} = \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^T + \gamma\hat{\mathbf{R}}_l)^{-1}$
  - 8:    $\mathbf{u}_{l+1,m}^0 = \mathbf{u}_{l,m}^0 + \mathbf{B}_{\gamma,l}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{u}_{l,m}^0)$
  - 9:    $\mathbf{u}_l^0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_{l,m}^0$
  - 10:    $l = l + 1$
  - 11: **until** 停止基準を満たす
- 

#### 4 数値実験

数値実験結果を示す。熱伝導方程式の解  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$  により真の温度勾配と求める初期値  $f(x) = u(x, 0) = \sin \pi x$  を与える。また各時刻  $t$  における真の温度勾配ベクトル  $\mathbf{y}_{\text{true}}$  に対して、平均 0、分散  $\sigma^2 = (\delta \|\mathbf{y}_{\text{true}}\|_2 / 2)^2$  の正規分布に従う誤差を与えたものを観測データとする。熱伝導率  $\lambda = 1$  とし、観測時間の長さを  $T = 0.1$  とする。空間分割数を 10、時刻刻み幅を  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  とし、 $\delta = 10^{-1}$ 、メンバ数を 10000 としたときの  $\gamma = 0, 180, 1000$  に対する数値実験結果は、それぞれ図 1, 2, 3 のとおりである。なお、グラフ内の赤線が初期メンバの平均、黒線が真の解、青線が 10 回の実験による推定値の平均を表している。

それぞれの結果における絶対誤差は、 $3.53 \times 10^0$ ,  $1.95 \times 10^{-1}$ ,  $9.25 \times 10^{-2}$  であった。これらの結果により、一定のメンバ数を使用した場合、パラメータ  $\gamma$  は、Tikhonov 正則化法 [3] における正則化パラメータと同様に数値安定性をもたらす、さらにパラメータを適切に定めることにより満足できる精度の結果を得られる可能性があることがわかった。一方、メンバ数を減少させた場合、 $\gamma$  の取り方を変更しても、精度の高い結果は得られなかった。今後は、パラメータ  $\gamma$  およびメンバ数の選択方法、本提案手法の数学解析、そして他の逆問題への応用が課題である。

#### 参考文献

- [1] 登坂宣好, 大西和榮, 偏微分方程式の数値シミュレーション [第 2 版], 東京大学出版会, 2006.
- [2] 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌宏, 逆問題の数理と解法, 東京大学出版会, 1999.

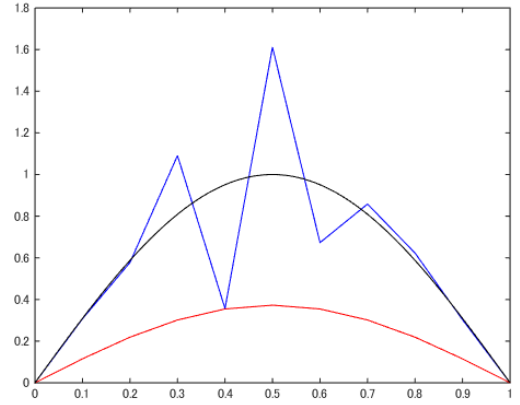


図 1  $\gamma = 0$

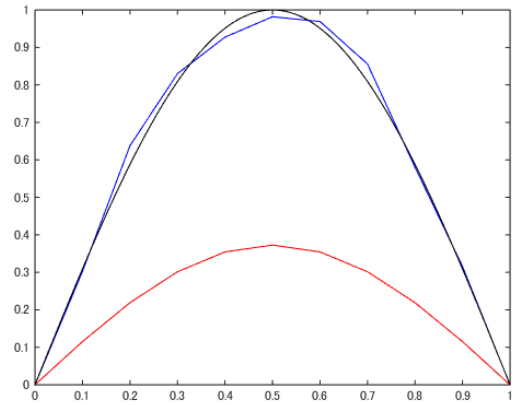


図 2  $\gamma = 180$

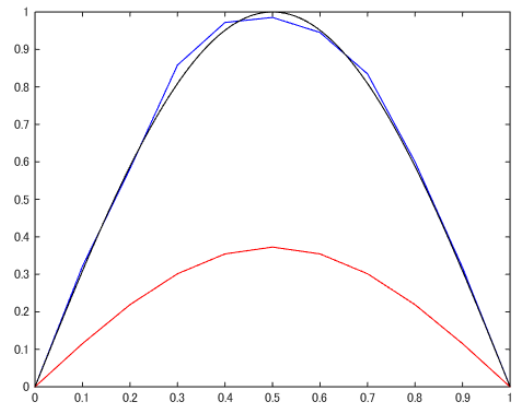


図 3  $\gamma = 1000$

- [3] A. Kirsch, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer, 2011.
- [4] 遠藤龍司, 登坂宣好, 可変的パラメトリック射影フィルタによるフレーム構造物の損傷同定解析, 計算数理工学会論文集, Vol. 7, No. 2, No. 09-080317 (PDF), 2008.
- [5] 樋口知之 (編著), 上野玄太, 中野慎也, 中村和幸, 吉田亮, データ同化入門, シリーズ予測と発見の科学 6, 朝倉書店, 2011.
- [6] 山下幸彦, 最適画像復元に関する理論的研究, 東京工業大学大学院情報工学専攻博士論文, 1993.